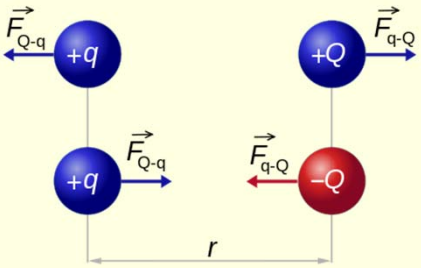
Classificazione delle forze

- forza peso (gravità)
- reazione vincolare
- tensione/compressione
- forza di attrito: statico o dinamico, strisciamento o rotolamento
- forza elastica
- forza viscosa
- forza elettromagnetica
- forza di inerzia
- resistenza aerodinamica
- forza elettrostatica
- forza impulsiva
- ...

Unità di misura: kg m/s^2, nel sistema SI denominato Newton, simbolo N.

Forza ELETTROSTATICA

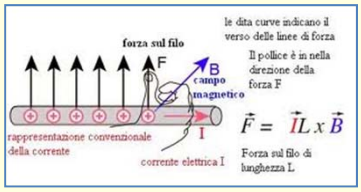
Forza (descritta dalla legge di Coulomb) esercitata dal campo elettrico su una carica elettrica. Agisce tra oggetti elettricamente carichi, ed è definita dal valore dell'interazione tra due cariche elettriche puntiformi e ferme nel vuoto.



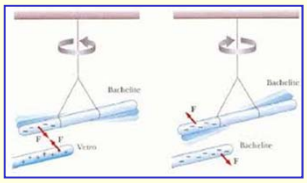
$$|\vec{F}_{Q\text{-}q}| = |\vec{F}_{q\text{-}Q}| = k\,\frac{|q \times Q|}{r^2}$$

Forza **ELETTROMAGNETICA**

Una particella carica che si trovi a passare in una zona di spazio dove sia presente un campo elettrico E ed un campo magnetico B risente sia della forza elettrica, sia della forza magnetica. La forza totale è detta forza elettromagnetica, o forza di Lorentz.



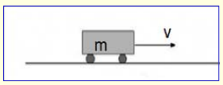
$$F_{\text{elettromagnetica}} = q\,E + q\,v \times B$$



q =carica elettrica dell'oggetto
E = campo elettrico
v= velocità della carica
B = campo magnetico
x = simbolo del prodotto vettoriale

Caratteristiche inerziali dei corpi rigidi

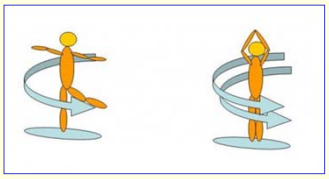
Moto rettilineo



$$m = \rho \cdot V$$

m = massa [kg]
ρ = densità [kg/m^3]
V = volume [m^3]

Moto rotatorio



$$\mathrm{I} = m \cdot r^2$$

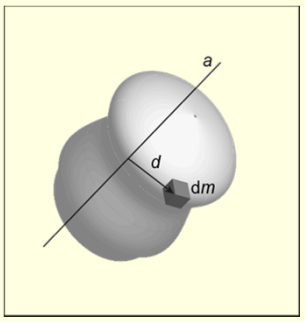
I = momento di inerzia di massa [kg m^2]
m = massa [kg]
r = raggio giratore [m]

MOMENTO DI INERZIA DI MASSA

$$I_a = \int_v d^2\, dm = \int_v d^2 \rho dV = m \cdot r^2$$

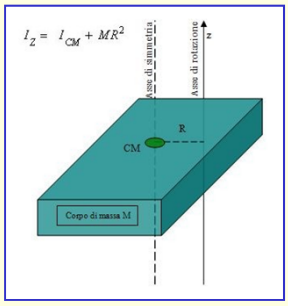
$$r = \sqrt{\frac{I_a}{m}}$$ = raggio giratore

$$I_b = I_G + m\delta^2$$

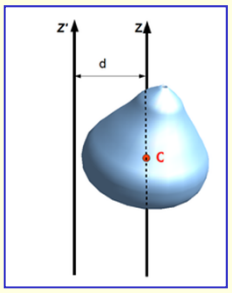


MOMENTO DI INERZIA DI MASSA

Momento di inerzia di massa di un corpo solido rispetto ad una retta parallela ad una retta passante per il baricentrico (teorema di Huygens-Steiner)



$$I_{z'} = I_z + m d^2$$



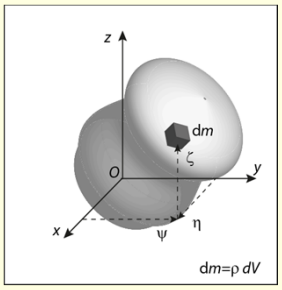
TENSORE DI INERZIA

$$I_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_V \rho(\psi^2 + \zeta^2)dV$$

$$I_{yy} = \int_V \rho(\eta^2 + \zeta^2)dV$$

$$I_{zz} = \int_V \rho(\eta^2 + \psi^2)dV$$



$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_V \rho(\eta \cdot \psi)dV \qquad I_{yz} = I_{zy} = -\int_V \rho(\psi \cdot \zeta)dV \qquad I_{xz} = I_{zx} = -\int_V \rho(\eta \cdot \zeta)dV$$

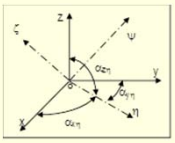
Matrice principale di inerzia

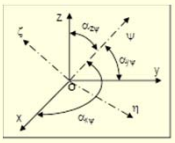
È riferita ad una terna cartesiana con origine nel baricentro G

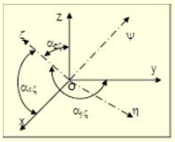
$$I_P = \begin{bmatrix} I_\eta & 0 & 0 \\ 0 & I_\psi & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{bmatrix}$$

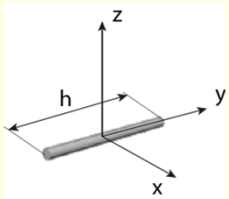
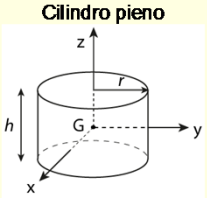
Matrice di rotazione di una terna cartesiana rispetto ad un'altra con la stessa origine

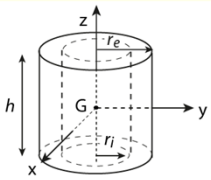
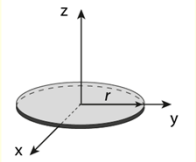
$$R = \begin{bmatrix} C\alpha_{\eta x} & C\alpha_{\psi x} & C\alpha_{\zeta x} \\ C\alpha_{\eta y} & C\alpha_{\psi y} & C\alpha_{\zeta y} \\ C\alpha_{\eta z} & C\alpha_{\psi z} & C\alpha_{\zeta z} \end{bmatrix}$$

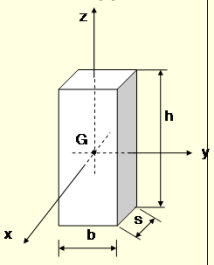
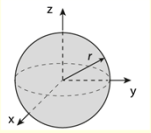


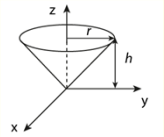
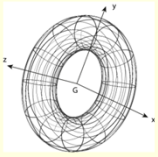




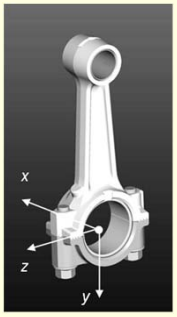
	Massa [kg] (ρ=densità)	Momento di inerzia di massa [kgm^2]
Asta sottile 	$m = \rho A h$ (*A*=area sezione)	$I_x = \frac{1}{12} m h^2$ $I_y \cong 0$ $I_z = \frac{1}{12} m h^2$
Cilindro pieno 	$m = \rho \pi r^2 h$	$I_x = \frac{1}{12} m (3 \cdot r^2 + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m (3 \cdot r^2 + h^2)$ $I_z = \frac{1}{2} m r^2$

	Massa [kg] (ρ=densità)	Momento di inerzia di massa [kgm^2]
Cilindro cavo 	$m = \rho \pi (r_e^2 - r_i^2) h$	$I_x = \frac{1}{12} m (3 \cdot (r_e^2 + r_i^2) + h^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m (3 \cdot (r_e^2 + r_i^2) + h^2)$ $I_z = \frac{1}{2} m (r_e^2 + r_i^2)$
Disco sottile 	$m = \rho \pi r^2 s$ (s=spessore) $(s << r)$	$I_x = \frac{1}{4} m r^2$ $I_y = \frac{1}{4} m r^2$ $I_z = \frac{1}{2} m r^2$

	Massa [kg] (ρ=densità)	Momento di inerzia di massa [kgm^2]
Parallelepipedo 	$m=\rho\cdot b\cdot s\cdot h$	$I_x=\frac{1}{12}m\left(b^2+h^2\right)$ $I_y=\frac{1}{12}m\left(s^2+h^2\right)$ $I_z=\frac{1}{12}m\left(b^2+s^2\right)$
Sfera 	$m=\frac{4}{3}\cdot\rho\cdot\pi\cdot r^3$	$I_x=\frac{2}{5}mr^2$ $I_y=\frac{2}{5}mr^2$ $I_z=\frac{2}{5}mr^2$

	Massa [kg] (ρ=densità)	Momento di inerzia di massa [kgm^2]
Cono 	$m=\frac{1}{3}\cdot\rho\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$	$I_x=\frac{3}{5}m\left(\frac{r^2}{4}+h^2\right)$ $I_y=\frac{3}{5}m\left(\frac{r^2}{4}+h^2\right)$ $I_z=\frac{3}{10}mr^2$
Anello toroidale  (x, y=assi diametrali)	$m=2\cdot\rho\cdot\pi^2\cdot R\cdot r^2$ (r=raggio del tubo) (R= distanza dal centro del tubo al centro G del toro)	$I_x=m\left(r^2+\frac{3}{4}R^2\right)$ $I_y=m\left(r^2+\frac{3}{4}R^2\right)$ $I_z=\frac{1}{8}m\left(4r^2+5R^2\right)$

Applicazione:
Caratteristiche inerziali ricavate da disegno CAD



Tensore di inerzia rispetto al sistema di riferimento scelto dal disegnatore

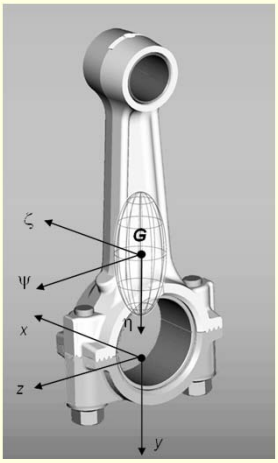
$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.870561 & 0.0000134016 & 0.0000344409 \\ 0.0000134016 & 0.0971312 & 0.000303048 \\ 0.0000344409 & 0.000303048 & 0.794950 \end{bmatrix}$$

Tensore di inerzia rispetto ad un sistema di riferimento con origine nel baricentro G e assi *x,y,z* paralleli a quelli del riferimento originale

$$I_G = \begin{bmatrix} 0.669727 & 0.0000590797 & 0.0000344238 \\ 0.0000590797 & 0.0971312 & 0.000227501 \\ 0.0000344238 & 0.000227501 & 0.594116 \end{bmatrix}$$

Università di Padova – PAS – a.a. 2014/15
Classe A020 – Corso: Didattica di Meccanica delle Macchine

Applicazione:
Caratteristiche inerziali ricavate da disegno CAD



MATRICE PRINCIPALE DI INERZIA

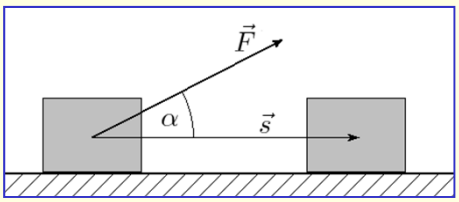
$$I_P = \begin{bmatrix} I_\eta & 0 & 0 \\ 0 & I_\psi & 0 \\ 0 & 0 & I_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0971311 & 0 & 0 \\ 0 & 0.594116 & 0 \\ 0 & 0 & 0.669727 \end{bmatrix}$$

Matrice di rotazione

$$R = \begin{bmatrix} C\alpha_{\eta x} & C\alpha_{\psi x} & C\alpha_{\zeta x} \\ C\alpha_{\eta y} & C\alpha_{\psi y} & C\alpha_{\zeta y} \\ C\alpha_{\eta z} & C\alpha_{\psi z} & C\alpha_{\zeta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.000103151 & -0.000455634 & 0.999999 \\ 0.999999 & 0.000457708 & 0.000103360 \\ -0.000457755 & 0.999999 & 0.000455586 \end{bmatrix}$$

LAVORO

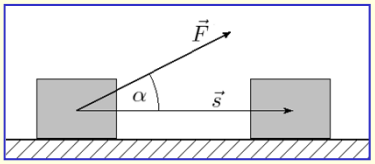
Trasferimento di energia cinetica tra due sistemi attraverso l'azione di una forza ,o una risultante di forze, quando l'oggetto subisce uno spostamento e la forza ha una componente non nulla nella direzione dello spostamento.
Il lavoro complessivo esercitato su un corpo è pari dunque alla variazione della sua energia cinetica. In particolare il lavoro compiuto da una forza è nullo se questa non ha componenti lungo la direzione dello spostamento o se lo spostamento è nullo.
Nel caso di un campo di forza conservativo (cioè in assenza di effetti dissipativi), il lavoro svolto è pari alla variazione di energia potenziale tra gli estremi del percorso.



LAVORO

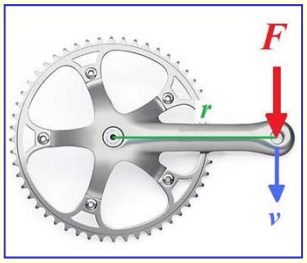
Moto **RETTILINEO**

$$L = \bar{F} \times \bar{s} = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$$



Moto **ROTATORIO**

$$L = M \cdot \theta = (F \cdot r) \cdot \theta$$

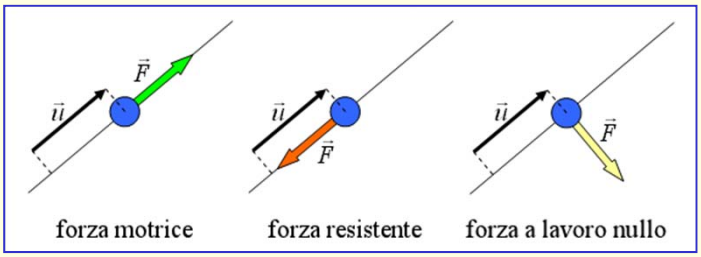


θ = angolo di rotazione [rad]

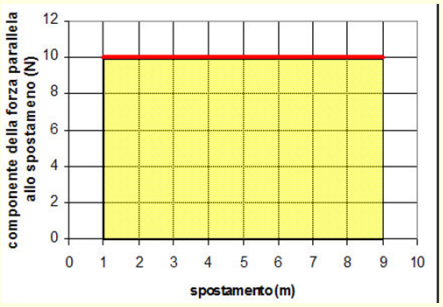
Unità di misura del lavoro: N m = Joule

LAVORO

Classificazione in funzione del senso dei vettori



LAVORO di una **FORZA COSTANTE**

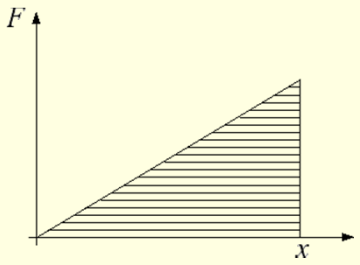


$$L = F \cdot (x_2 - x_1)$$

x_2 = posizione finale
x_1 = posizione iniziale
L = area nel diagramma F-s

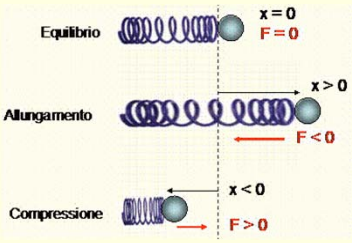
Esempio: lavoro fatto da una forza peso

LAVORO di una **FORZA ELASTICA**

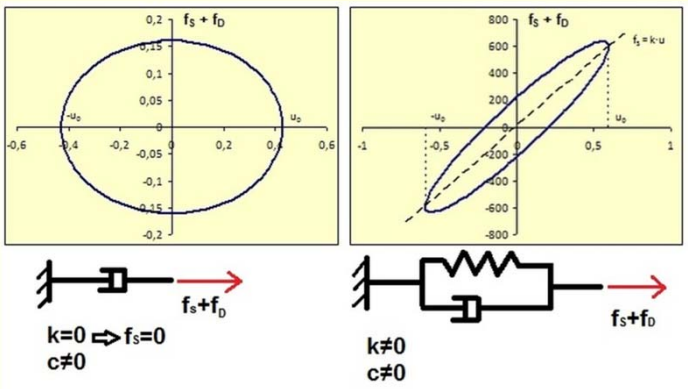


$$L = \int F \cdot dx = \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

x = spostamento [m]
k = costante elastica [N/m]
L = area nel diagramma F-x [Nm]

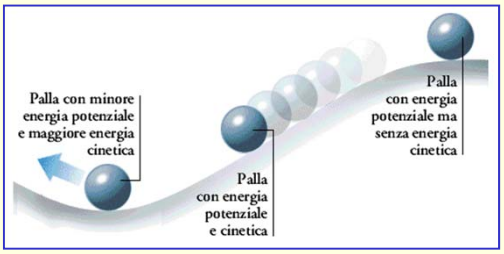


LAVORO di una **FORZA VISCOSA**

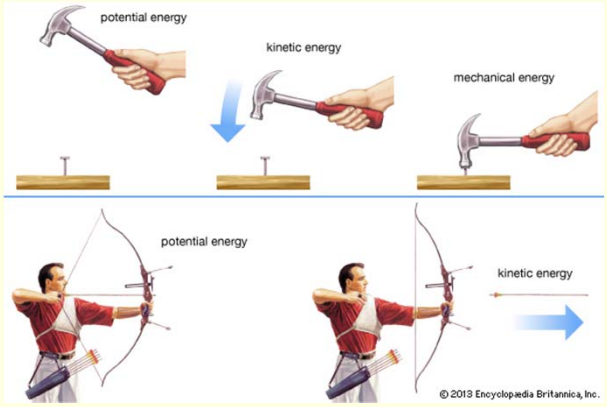


ENERGIA

L'energia è la grandezza fisica che misura la capacità di un corpo o di un sistema di compiere lavoro, a prescindere dal fatto che tale lavoro sia o possa essere effettivamente svolto.

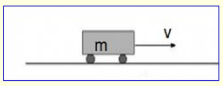


Energie **POTENZIALE** e **CINETICA**



Energia cinetica del **corpo rigido**

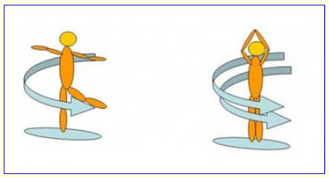
Moto rettilineo



$$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

m = massa [kg]
v = velocità [m/s]
E_c = energia cinetica [J]

Moto rotatorio



$$E_c = \frac{1}{2} \mathrm{I} \cdot \omega^2$$

I = momento di inerzia di massa [kg m^2]
ω = velocità angolare [rad/s]
E_c = energia cinetica [J]

Università di Padova – PAS – a.a. 2014/15
Classe A020 – Corso: Didattica di Meccanica delle Macchine

Energia cinetica di un **sistema di corpi rigidi**

Energia cinetica del sistema di più corpi rigidi

$$E_c = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \cdot v_n^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \mathrm{I}_n \cdot \omega_n^2$$

Energia cinetica ridotta ad un solo corpo rigido

$$E_c = \frac{1}{2} m_{rid} \cdot v_{rif}^2 = \frac{1}{2} \mathrm{I}_{rid} \cdot \omega_{rif}^2$$

m_{rid} = massa ridotta
I_{rid} = momento di inerzia di massa ridotto
v_{rif} = velocità di riferimento per moto traslatorio
ω_{rif} = velocità angolare di riferimento per moto rotatorio

Riduzione di un sistema di corpi rigidi ad un unico corpo

Riduzione ad un unico corpo rigido TRASLANTE

$$\frac{1}{2} m_{rid} \cdot v_{rif}^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \cdot v_n^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \mathrm{I}_n \cdot \omega_n^2$$

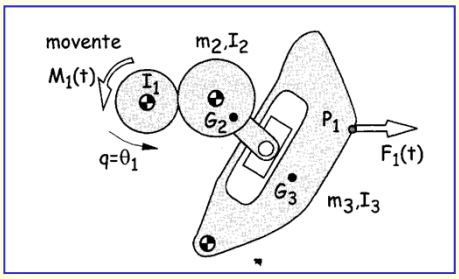
Riduzione ad un unico corpo rigido ROTANTE

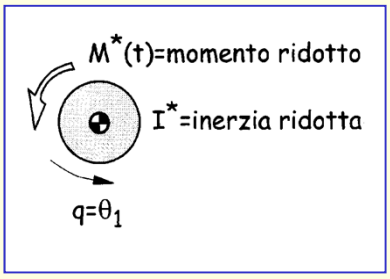
$$\frac{1}{2} \mathrm{I}_{rid} \cdot \omega_{rif}^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n \cdot v_n^2 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} \mathrm{I}_n \cdot \omega_n^2$$

m_{rid} = massa ridotta
I_{rid} = momento di inerzia di massa ridotto
v_{rif} = velocità di riferimento per moto traslatorio
ω_{rif} = velocità angolare di riferimento per moto rotatorio

Momento di inerzia di massa ridotto – un solo corpo rigido rotante

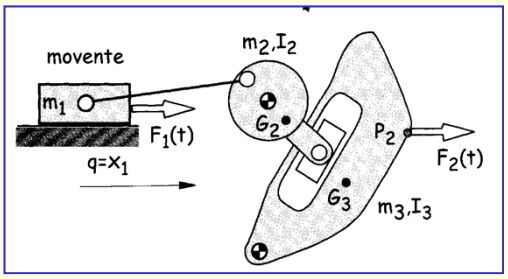
$$\mathrm{I}_{rid} = \sum_{n=1}^{N} m_n \cdot \frac{v_n^2}{\omega_{rif}^2} + \sum_{n=1}^{N} \mathrm{I}_n \cdot \frac{\omega_n^2}{\omega_{rif}^2}$$

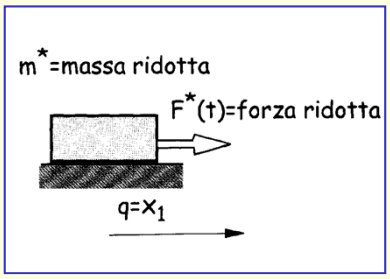




Massa ridotta – un solo corpo rigido traslante

$$m_{rid} = \sum_{n=1}^{N} m_n \cdot \frac{v_n^2}{v_{rif}^2} + \sum_{n=1}^{N} I_n \cdot \frac{\omega_n^2}{v_{rif}^2}$$





POTENZA

La potenza quantifica il trasferimento, la produzione e l'utilizzo dell'energia.

È definita operativamente come la variazione di lavoro nell'unità di tempo.

Moto rettilineo

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d(F \cdot s)}{dt}$$

$$F = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad P = F \cdot v$$

Moto rotatorio

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d(M \cdot \theta)}{dt}$$

$$M = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad P = M \cdot \omega$$

Unità di misura : Watt (W), come rapporto tra unità di energia in joule (J) e unità di tempo in secondi (s)